1. वास्तविक संख्याएँ

कक्षा 9 में हमने संख्या पद्धति के बारे में पढ़ा। इस कक्षा में हम वास्तविक संख्याओं के बारे में जानेगें। अगर हम सभी प्रकार की संख्याओं को देखें तो पायेंगे कि सभी में आपस में संबद्ध है।

प्राकृतिक संख्याएँ

1 से शुरू होकर अनंत तक हैं। $(1, 2, \ldots\ldots, \infty)$

पूर्ण संख्याएँ

पूर्ण संख्याएँ 0 से शुरू होकर अनंत तक हैं। $(0, 1, 2, \ldots\ldots, \infty)$

पूर्णांक

पूर्णांक में सभी ऋणेत्तर संख्याएँ एवं शून्येत्तर संख्याओं के ऋणात्मक एवं शून्य भी शामिल है। $(-\infty, \ldots\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\ldots, +\infty)$

इसे दूसरी भाषा में कह सकते हैं –

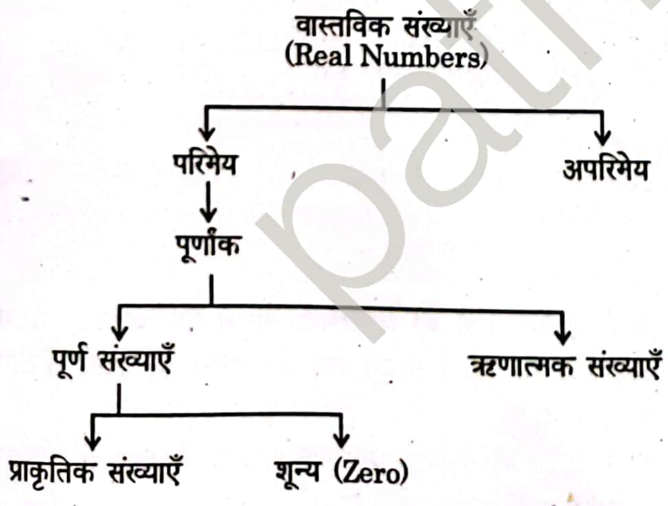
पूर्णांक (Integers) : सभी धनात्मक एवं ऋणात्मक संख्याओं के समूह में शून्य (Zero) को भी शामिल कर देने से संख्याओं का जो समूह बनता है, उसे पूर्णांक कहते हैं। $-\infty, \ldots\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\ldots, +\infty)$

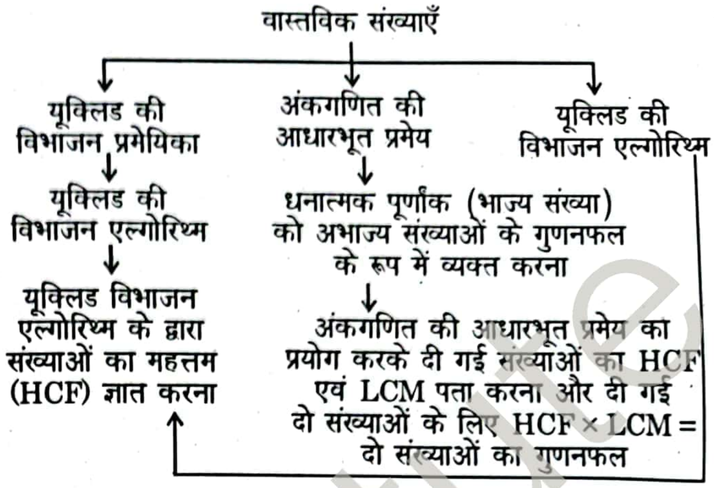
परिमेय संख्याएँ

परिमेय संख्या वह संख्या है जिसे हम p/q के रूप में लिख सकते हैं। जहाँ p, q पूर्णांक है एवं $q \neq 0$ (अतः परिमेय संख्याएँ पूर्णांकों से मिलकर बनी है।)

अपरिमेय संख्याएँ

वह संख्याएँ जिसे हम p/q के रूप में नहीं लिख सकते हैं तथा जिसका दशमलव प्रसार असान्त एवं अनावर्ती हो।





1. **प्रमेयिका (Lemma)** – प्रमेयिका एक सिद्ध किया हुआ कथन होता है और इसे एक अन्य कथन को सिद्ध करने में प्रयोग होता है।
2. **यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका (Euclid's division lemma)** – दो धनात्मक पूर्णांक a और b दिए रहने पर, (जहाँ $a > b$) ऐसी अद्वितीय पूर्ण संख्याएं q और r विद्यमान हैं कि $a = bq + r, 0 \leq r < b$
   जहाँ $q =$ भागफल, $r =$ शेषफल
3. यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म का इस्तेमाल दो धनात्मक संख्याओं का महत्तम (HCF) पता करने में किया जाता है।

उदाहरण : 4052 और 12576 का HCF यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग करके ज्ञात कीजिए।

हल :

चरण 1 : यहाँ $12576 > 4052$ है। तो $12576 = a$, एवं $4052 = b$ हम 12576 और 4052 पर युक्लिड प्रमेयिका का प्रयोग करने पर, प्राप्त करते हैं :
$12576 = 4052 \times 3 + 420$

चरण 2 : क्योंकि शेषफल शून्य नहीं है, इसलिए हम 4052 और 420 के लिए युक्लिड प्रमेयिका का प्रयोग करेंगे :
यहाँ $4052 = a, 420 = b$
$4052 = 420 \times 9 + 272$

चरण 3 : पुनः शेषफल शून्य नहीं है इसलिए :
यहाँ $a = 420, b = 272$
$420 = 272 \times 1 + 148$

शेषफल शून्य नहीं है अब, हम नए भाजक 272 और नए शेषफल 148 पर यूक्लिड प्रमेयिका का प्रयोग करेंगे :
$272 = 148 \times 1 + 124$

जब तक शेषफल शून्य नहीं आता तब तक हम प्रत्येक चरण में प्राप्त भाजक और नए शेषफल पर यूक्लिड प्रमेयिका लगाते रहेंगे:

$$148 = 124 \times 1 + 24$$
$$124 = 24 \times 5 + 4$$
$$24 = 4 \times 6 + 0$$

यहाँ शेषफल 0 प्राप्त हो गया है, इसलिए प्रक्रिया यहाँ समाप्त हो जाती है। क्योंकि इस प्रक्रिया को हम और आगे नहीं बढ़ा सकते हैं। चूँकि इस स्थिति में भाजक 4 है, इसलिए 12576 और 4052 का HCF 4 है।

ध्यान दीजिए कि HCF (24, 4) = HCF (124, 24) = HCF (148, 124) = HCF (272, 148) = HCF (420, 272) = HCF (4052, 420) = HCF (12576, 4052) है।

यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म न केवल बड़ी संख्याओं के HCF परिकलित करने में उपयोगी है, अपितु यह इसलिए भी महत्वपूर्ण है कि यह उन एल्गोरिथ्मों में से एक है, जिनका कम्प्यूटर में एक प्रोग्राम के रूप में सबसे पहले प्रयोग किया गया।

टिप्पणी

1. युक्लिड विभाजन प्रमेयिका और यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म परस्पर इतने समान है कि विद्यार्थी प्रायः यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका को ही यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म कहते हैं।
2. यद्यपि यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका/एल्गोरिथ्म को केवल धनात्मक पूर्णांकों के लिए ही लिखा गया है, परंतु इसे पूर्णांकों (शून्य को छोड़कर अर्थात् $b \neq 0$) के लिए लागू किया जा सकता है। यद्यपि, हम यहाँ इस तथ्य पर विचार नहीं करेंगे।

उदाहरण : दर्शाइए कि प्रत्येक धनात्मक सम पूर्णांक $2q$ के रूप का होता है तथा प्रत्येक धनात्मक विषम पूर्णांक $2q + 1$ के रूप का होता है, जहाँ q कोई पूर्णांक है।

हल : मान लीजिए a कोई धनात्मक पूर्णांक है तथा $b = 2$ है। तब यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका से, किसी पूर्णांक $q \geq 0$ के लिए, $a = 2q + r$ है,

$\because$ $b = 2$ है अतः $r = 0$ या 1 होगा क्योंकि $0 \leq r < b$ होता है।

यदि $r = 0$ तो $a = 2q$ है तो यह एक सम पूर्णांक है। साथ ही, एक धनात्मक पूर्णांक या तो सम हो सकता है या विषम। इसलिए कोई भी धनात्मक विषम पूर्णांक $2q + 1$ के रूप का होगा।

उदाहरण : दर्शाइए कि एक धनात्मक विषम पूर्णांक $4q + 1$ या $4q + 3$ के रूप का होता है, जहाँ q एक पूर्णांक है।

हल : माना 'a' एक धनात्मक विषम पूर्णांक है, हम a और $b = 4$ (माना) में विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग करते हैं।

चूँकि $0 \leq r < 4$ है, इसलिए संभावित शेषफल 0, 1, 2 और 3 होगें अर्थात् a संख्याओं $4q$, $4q + 1$, $4q + 2$ या $4q + 3$ के रूप का हो सकता है जहाँ q भागफल है। चूँकि a एक विषम पूर्णांक है, इसलिए यह $4q$ और $4q + 2$ के रूप का नहीं हो सकता (क्योंकि दोनों 2 से विभाज्य हैं)।

इसलिए, कोई भी धनात्मक विषम पूर्णांक $4q + 1$ या $4q + 3$ के रूप में होगा।

उदाहरण : एक मिठाई विक्रेता के पास 420 काजू की बर्फियाँ और 130 बादाम की बर्फियाँ हैं। वह इनकी ऐसी ढेरियाँ बनाना चाहती है कि प्रत्येक ढेरी में बर्फियों की संख्या समान रहे तथा ये ढेरियाँ बर्फी की परात में न्यूनतम स्थान घेरें। इस काम के लिए, प्रत्येक ढेरी में कितनी बर्फियाँ रखी जा सकती हैं?

हल : हम हल करने के लिए HCF (420, 130) ज्ञात करते हैं। तब, इस HCF से प्रत्येक ढेरी में रखी जा सकने वाली बर्फियों की अधिकतम संख्या प्राप्त होगी, जिससे ढेरियों की संख्या न्यूनतम होगी और परात में ये बर्फियाँ न्यूनतम स्थान घेरेंगी।

यूक्लिड एल्गोरिथ्म का प्रयोग करके 420 और 130 का HCF ज्ञात करेंगें।

$$420 = 130 \times 3 + 30$$
$$130 = 30 \times 4 + 10$$
$$30 = 10 \times 3 + 0$$

अतः 420 और 130 का HCF 10 है।

इसलिए, प्रत्येक प्रकार की बर्फियों के लिए मिठाई विक्रेता दस-दस की ढेरी बना सकती है।

प्रश्नावली 1.1

1. निम्नलिखित संख्याओं का HCF ज्ञात करने के लिए यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग कीजिए :

(i) 135 और 225 (ii) 196 और 38220

(iii) 867 और 255

हल :

(i) $225 = a$, $135 = b$

$\therefore$ $225 = 135 \times 1 + 90$

$135 = 90 \times 1 + 45$

$90 = 45 \times 2 + 0$

$\therefore$ HCF = 45

(ii) $a = 38220$, $b = 196$

$38220 = 196 \times 195 + 0$

$\therefore$ HCF = 196

(iii) $867 = a$, $255 = b$

$867 = 255 \times 3 + 102$

$255 = 102 \times 2 + 51$

$102 = 51 \times 2 + 0$

HCF = 51

2. दर्शाइए कि कोई भी धनात्मक विषम पूर्णांक $6q + 1$, या $6q + 3$, या $6q + 5$, के रूप का होता है, जहाँ q कोई पूर्णांक है।

हल : मान लीजिए a कोई धनात्मक पूर्णांक है तथा $b = 6$ तब यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका से,

$a = bq + r, 0 \le r < b$

$a = 6q + r$ जहाँ $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

Case I. जब, $r = 0$

$a = 6q = 2 \times 3q$ (सम)

Case II. जब, $r = 1$

$a = 6q + 1 = 2 \times 3q + 1$ (विषम)

Case III. जब, $r = 2$

$a = 6q + 2 = 2(3q + 1)$ (सम)

Case IV. जब, $r = 3$

$a = 6q + 3 = 6q + 2 + 1 = 2(3q + 1) + 1$ (विषम)

Case V. जब, $r = 4$

$a = 6q + 4 = 2 \times (3q + 2)$ (सम)

Case VI. जब, $r = 5$

$a = 6q + 5 = 6q + 4 + 1 = 2(3q + 2) + 1$ (विषम)

ऊपर किए हल से हम यह कह सकते हैं कि कोई धनात्मक विषम पूर्णांक $6q + 1$ या $6q + 3$ या $6q + 5$ के रूप का होता है। जहाँ q कोई पूर्णांक है।

3. किसी परेड में 616 सदस्यों वाली एक सेना (आर्मी) की टुकड़ी को 32 सदस्यों वाले एक आर्मी बैंड के पीछे मार्च करना है। दोनों समूहों को समान संख्या वाले स्तंभों में मार्च करना है। उन स्तंभों की अधिकतम संख्या क्या है, जिसमें वे मार्च कर सकते हैं?

हल :

$616 = 32 \times 19 + 8$

$32 = 8 \times 4 + 0$

$\therefore$ HCF $= 8$

स्तंभों की अधिकतम संख्या $= 8$

4. यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग करके दर्शाइए कि किसी धनात्मक पूर्णांक का वर्ग, किसी पूर्णांक m के लिए $3m$ या $3m + 1$ के रूप में होता है।

[संकेत : यह मान लीजिए x कोई धनात्मक पूर्णांक है। तब, यह $3q$, $3q + 1$ या $3q + 2$ के रूप में लिया जा सकता है। इनमें से प्रत्येक का वर्ग कीजिए और दर्शाइए कि इन वर्गों को $3m$ या $3m + 1$ के रूप में लिखा जा सकता है।]

हल : मान लिया a कोई धनात्मक पूर्णांक है एवं $b = 3$ है तो यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका द्वारा

$a = bq + r \qquad 0 \le r < b$

$\Rightarrow a = 3q + r$, जहाँ $r = 0, 1, 2$

Case I. जब, $r = 0$

$a = 3q + 0 = a^2 = (3q)^2 = 9q^2 = 3 \times (3q^2) = 3m$ जहाँ $m = 3q^2$

Case II. जब, $r = 1$

$a = 3q + 1$

$a^2 = (3q + 2)^2 \qquad a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

$9q^2 + 6q + 1 = 3 \times (3q^2 + 2q) + 1 = 3m + 1$

जहाँ $m = 3q^2 + 2q$

Case III. जब, $r = 2$

$a = 3q + 2$

$a^2 = (3q + 2)^2$

$= 9q^2 + 12q + 4$

$= 9q^2 + 12q + 3 + 1$

$= 3(3q^2 + 4q + 1) + 1$ जहाँ $m = 3q^2 + 4q + 1$

$= 3m + 1$

अतः हम ऊपर किए गए प्रयोग से कह सकते हैं कि किसी धनात्मक पूर्णांक का वर्ग किसी पूर्णांक m के लिए $3m$ या $3m + 1$ के रूप का होता है।

5. यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका का प्रयोग करके दर्शाइए कि किसी धनात्मक पूर्णांक का धन $9m$, $9m + 1$ या $9m + 8$ के रूप में होता है।

हल : माना a कोई धनात्मक पूर्णांक है और $b = 3$ तो यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका द्वारा

$a = bq + r, 0 \le r < b$

$a = 3q + r$ जहाँ $r = 0, 1, 2$

Case I : जब, $r = 0$

$\therefore a = 3q + 0$

$a^3 = (3q)^3 = 27q^3 = 9 \times (3q^3) = 9m$ जहाँ $m = 3q^3$

Case II : जब, $r = 1$

$a = 3q + 1$

$a^3 = (3q + 1)^3 \qquad (a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$

$= 27q^3 + 3 \times (3q)^2 \times 1 + 3 \times 3q \times (1)^2 + (1)^3$

$= 27q^3 + 3 \times 9q^2 + 9q + 1$

$= 27q^3 + 27q^2 + 9q + 1$

$= 3(9q^3 + 9q^2 + 3q) + 1$

$= 3m + 1$ जहाँ $m = 9q^3 + 9q^2 + 3q$

Case III : जब, $r = 2$

$a = 3q + 2$

$a^3 = (3q + 2)^3$

$= 27q^3 + 3 \times (3q)^2 \times 2 + 3 \times 3q \times (2)^2 + (2)^3$

$= 27q^3 + 3 \times 9q^2 \times 2 + 9q \times 4 + 8$

$= 27q^3 + 54q^2 + 36q + 8$

$= 9(3q^3 + 6q^2 + 4q) + 8$

$= 9m + 8$ जहाँ $m = 3q^3 + 6q^2 + 4q$

अतः हम यह कह सकते हैं कि किसी धनात्मक पूर्णांक का घन $9m$, $9m + 1$ या $9m + 8$ के रूप का होता है।

अंकगणित की आधारभूत प्रमेय

प्रत्येक भाज्य संख्या (Composite Number) को अभाज्य संख्याओं के गुणनफल के रूप में व्यक्त (गुणनखंडित) किया जा सकता है तथा यह गुणनखंड अभाज्य गुणनखंडों के आने वाले क्रम के बिना अद्वितीय होता है।

उदाहरण : संख्याओं 4^n पर विचार कीजिए, जहाँ n एक प्राकृत संख्या है। जाँच कीजिए कि क्या n का कोई ऐसा मान है, जिसके लिए 4^n अंक शून्य (0) पर समाप्त होता है।

हल : यदि किसी n के लिए, संख्या 4^n शून्य पर समाप्त होगी तो वह 5 से विभाज्य होगी। अत: 4^n के अभाज्य गुणनखंड में अभाज्य संख्या 5 आनी चाहिए। यह संभव नहीं है क्योंकि $4^n = (2)^{2n}$ है। इसी कारण, 4^n के गुणनखंड में केवल अभाज्य संख्या 2 आ सकती है। परंतु 4^n के गुणनखंड में 2 के अतिरिक्त और कोई अभाज्य गुणनखंड नहीं है। इसलिए ऐसी कोई संख्या n नहीं है, जिसके लिए 4^n अंक 0 पर समाप्त होगी।

उदाहरण : संख्याओं 6 और 20 के अभाज्य गुणनखंड विधि से HCF और LCM ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $6 = 2^1 \times 3^1$ और $20 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5^1$ है।

अत: HCF (6, 20) = 2 तथा LCM (6, 20) = $2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$ हैं।

> ध्यान दीजिए : कि दो संख्याओं का महत्तम = संख्याओं में प्रत्येक उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखंड की सबसे छोटी घात का गुणनफल तथा दो संख्याओं का लघुत्तम = संख्याओं में संबद्ध (उपस्थित) प्रत्येक अभाज्य गुणनखंड की सबसे बड़ी घात का गुणनफल

अत: ऊपर के उदाहरण में HCF (6, 20) = 2^1

LCM (6, 20) = $2^2 \times 3^1 \times 5^1$

किन्हीं दो धनात्मक पूर्णांकों a और b के लिए, HCF (a, b) × LCM (a, b) = a × b होता है।

उदाहरण : अभाज्य गुणनखंडन विधि द्वारा 96 और 404 का HCF ज्ञात कीजिए और फिर इनका LCM ज्ञात कीजिए।

हल :
$$\begin{array}{r|r} 2 & 96 \\ \hline 2 & 48 \\ \hline 2 & 24 \\ \hline 2 & 12 \\ \hline 2 & 6 \\ \hline & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|r} 2 & 404 \\ \hline 2 & 202 \\ \hline & 101 \end{array}$$

96 और 404 के अभाज्य गुणनखंड से हमें प्राप्त होता है कि

$96 = 2^5 \times 3$, $404 = 2^2 \times 101$

इसलिए, इन दोनों पूर्णांकों का HCF = $2^2 = 4$

साथ ही LCM (96, 404) =
$$\frac{96 \times 404}{HCF(96, 404)} = \frac{96 \times 404}{4} = 9696$$

उदाहरण : संख्या 6, 72 और 120 का अभाज्य गुणनखंड विधि द्वारा HCF और LCM ज्ञात कीजिए।

हल :
$$\begin{array}{r|r} 2 & 6 \\ \hline & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|r} 2 & 72 \\ \hline 2 & 36 \\ \hline 2 & 18 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|r} 2 & 120 \\ \hline 2 & 60 \\ \hline 2 & 30 \\ \hline 3 & 15 \\ \hline & 5 \end{array}$$

हमें प्राप्त है :

$6 = 2 \times 3$, $72 = 2^3 \times 3^2$ तथा $120 = 2^3 \times 3 \times 5$

2^1 और 3^1 प्रत्येक उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखंड की सबसे छोटी घातें हैं।

अत:,

HCF (6, 72, 120) = $2^1 \times 3^1 = 2 \times 3 = 6$

2^3, 3^2 और 5^1 प्रत्येक अभाज्य गुणनखंड की सबसे बड़ी घातें हैं, जो तीनों संख्याओं से संबद्ध हैं।

अत:,

LCM (6, 72, 120) = $2^3 \times 3^2 \times 5^1 = 360$

विद्यार्थी याद रखेंगें

> ध्यान दीजिए कि $6 \times 72 \times 120 \neq$ HCF (6, 72, 120) × LCM (6, 72, 120), अर्थात् तीन संख्याओं का गुणनफल उनके HCF और LCM के गुणनफल के बराबर नहीं होता है।

प्रश्नावली 1.2

1. निम्नलिखित संख्याओं को अभाज्य गुणनखण्डों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) 140 (ii) 156
(iii) 3825 (iv) 5005
(v) 7429

हल :

(i) $140 = 2 \times 2 \times 5 \times 7$
$= 2^2 \times 5 \times 7$
$$\begin{array}{r|r} 2 & 140 \\ \hline 2 & 70 \\ \hline 5 & 35 \\ \hline & 7 \end{array}$$

(ii) $156 = 2 \times 2 \times 3 \times 13$
$= 2^2 \times 3 \times 13$
$$\begin{array}{r|r} 2 & 156 \\ \hline 2 & 78 \\ \hline 3 & 39 \\ \hline & 13 \end{array}$$

(iii) $3825 = 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 17$
$= 3^2 \times 5^2 \times 17$
$$\begin{array}{r|r} 3 & 3825 \\ \hline 3 & 1275 \\ \hline 5 & 425 \\ \hline 5 & 85 \\ \hline & 17 \end{array}$$

(iv) $5005 = 5 \times 7 \times 11 \times 13$

$$\begin{array}{r|r} 5 & 5005 \\ \hline 7 & 1001 \\ \hline 11 & 143 \\ \hline & 13 \end{array}$$

(v) $7429 = 17 \times 19 \times 23$

$$\begin{array}{r|r} 17 & 7429 \\ \hline 19 & 437 \\ \hline & 23 \end{array}$$

2. पूर्णांकों के निम्नलिखित युग्मों के HCF और LCM ज्ञात कीजिए तथा इसकी जाँच कीजिए कि दो संख्याओं का गुणनफल = HCF × LCM है।

(i) 26 और 91 **(ii) 510 और 92**

(iii) 336 और 54

हल :

(i) 26 और 91

$26 = 2 \times 13$

$91 = 7 \times 13$

HCF = 13

LCM = $2 \times 7 \times 13 = 182$

$\therefore$ दो संख्याओं का गुणनफल = HCF × LCM

$\Rightarrow 26 \times 91 = 13 \times 182$

$\Rightarrow 2366 = 2366$ **सिद्ध किया**

(ii) 510 और 92

$$\begin{array}{r|r} 2 & 510 \\ \hline 3 & 255 \\ \hline 5 & 85 \\ \hline & 17 \end{array} \qquad \begin{array}{r|r} 2 & 92 \\ \hline 2 & 46 \\ \hline & 23 \end{array}$$

$510 = 2 \times 3 \times 5 \times 17$

$92 = 2 \times 2 \times 23$

$= 2^2 \times 23$

$\therefore$ HCF = 2

LCM = $2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 23 \times 17 = 23460$

दो संख्याओं का गुणनफल = HCF × LCM

$510 \times 92 = 23460 \times 2$

$46920 = 46920$ सिद्ध किया

(iii) 336 और 54

$336 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7$

$= 2^4 \times 3 \times 7$

$$\begin{array}{r|r} 2 & 336 \\ \hline 2 & 168 \\ \hline 2 & 84 \\ \hline 2 & 42 \\ \hline 3 & 21 \\ \hline & 7 \end{array}$$

$54 = 2 \times 3 \times 3 \times 3$

$= 2 \times 3^3$

$$\begin{array}{r|r} 2 & 54 \\ \hline 3 & 27 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline & 3 \end{array}$$

HCF = $2 \times 3 = 6$

LCM = $2 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7 = 3024$

$\therefore$ दो संख्याओं का गुणनफल = HCF × LCM

$336 \times 54 = 3024 \times 6$

$18144 = 18144$ **सिद्ध किया**

3. अभाज्य गुणनखंडन विधि द्वारा निम्नलिखित पूर्णांकों के HCF और LCM ज्ञात कीजिए :

(i) 12, 15 और 21 **(b) 17, 23 और 29**

(iii) 8, 9 और 25

हल :

(i) 12, 15 और 21

$$\begin{array}{r|r} 2 & 12 \\ \hline 2 & 6 \\ \hline & 3 \end{array}$$

$12 = 2 \times 2 \times 3$

$= 2^2 \times 3$

$15 = 3 \times 5$

$21 = 3 \times 7$

दी गई संख्याओं के लिए

HCF = 3

LCM = $2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 420$

(ii) $17 = 1 \times 17$

$23 = 1 \times 23$

$29 = 1 \times 29$

HCF = 1

LCM = $17 \times 23 \times 29 = 11339$

(iii) 8, 9 और 25

$8 = 2 \times 2 \times 2 \times 1$

$= 2^3 \times 1$

$9 = 3 \times 3 \times 1$

$= 3^2 \times 1$

$25 = 5 \times 5 \times 1$

$= 5^2 \times 1$

HCF = 1

LCM = $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 = 1800$

4. HCF (306, 657) = 9 दिया है। LCM (306, 657) ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया है

HCF (306, 657) = 9

LCM (306, 657) = ?

हम जानते हैं कि

LCM × HCF = दो संख्याओं का गुणनफल

$9 \times \text{LCM} = 306 \times 657$

$$\Rightarrow \text{LCM} = \frac{306 \times 657}{9} = 657 \times 34 = 22338$$

5. जाँच कीजिए कि क्या किसी प्राकृतिक संख्या n के लिए, संख्या 6^n अंक 0 पर समाप्त हो सकती है।

हल : यहाँ दिया गया है कि 6^n

अभाज्य गुणनखंड = $(2 \times 3)^n$

हम जानते हैं न तो 2 की किसी घात (Power) के लिए और न ही 3 की किसी घात के लिए संख्या शून्य समाप्त होती है।

इसलिए कोई ऐसी संख्या n नहीं है जिसके लिए 6^n अंक 0 पर समाप्त होगी।

6. व्याख्या कीजिए कि $7 \times 11 \times 13 + 13$ और $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 2 + 5$ भाज्य संख्याएँ क्यों हैं।

हल :

$7 \times 11 \times 13 + 13$	$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 2 + 5$
$= 13\,(7 \times 11 + 1)$	$= 5\,(7 \times 6 \times 4 \times 2 + 1)$
$= 13\,(77 + 1)$	$= 5\,(336 + 1)$
$= 13 \times 78$	$= 5 \times 337$
$= 13 \times 2 \times 3 \times 13$	

चूँकि दोनों संख्याओं को अभाज्य गुणनखंड के रूप में व्यक्त किया गया है। अतः अंकगणित की आधारभूत प्रमेय से दोनों संख्याएँ भाज्य हैं।

7. किसी खेल के मैदान के चारों ओर एक वृत्ताकार पथ है। इस मैदान का एक चक्कर लगाने में सोनिया को 18 मिनट लगते हैं, जबकि इसी मैदान का एक चक्कर लगाने में रवि को 12 मिनट लगते हैं। मान लीजिए वे दोनों एक ही स्थान और एक ही समय पर चलना प्रारंभ करके एक ही दिशा में चलते हैं। कितने समय बाद वे पुनः प्रारंभिक स्थान पर मिलेंगे?

हल : सोनिया द्वारा लिया गया समय = 18 मिनट

रवि द्वारा लिया गया समय = 12 मिनट

$\therefore$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 18 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 12 \\ \hline 2 & 6 \\ \hline & 3 \end{array}$$

$18 = 2 \times 3 \times 3$

$= 2 \times 3^2$

$12 = 2 \times 2 \times 3$

$= 22 \times 3$

$\text{LCM} = 2 \times 2 \times 3 \times 3$

$= 2^2 \times 3^2 = 36$ मिनट

दोनों 36 मिनट बाद पुनः प्रारंभिक स्थान पर मिलेंगे।

उदाहरण : सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हल : आइए हम इसके विपरीत यह मान लें कि $\sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या है।

r ks $\sqrt{3} = \dfrac{a}{b}$ है जहाँ a और b पूर्णांक है तथा $b \neq 0$

यदि a और b में, 1 के अतिरिक्त कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड हो, तो हम उस उभयनिष्ठ गुणनखंड से भाग देकर a और b को सहअभाज्य बना सकते हैं।

अतः $\sqrt{3}b = a$ है।

(सहअभाज्य संख्याएँ वो संख्याएँ होतीं है जिनका उभयनिष्ठ गुणनखंड केवल संख्या 1 होती है।)

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर, हमें $3b^2 = a^2$ ———(i)

अतः a^2, 3 से विभाजित है। इसलिए 3, a को भी विभाजित करेगा।

माना $a = 3c$, जहाँ c एक पूर्णांक है।

a के इस मान को समीकरण (i) में प्रतिस्थापित करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$3b^2 = 9c^2$ अर्थात् $b^2 = 3c^2$

इसका अर्थ है कि b^2, 3 से विभाजित हो जाता है। इसलिए b भी 3 से विभाजित होगा।

अतः a और b में कम-से-कम एक उभयनिष्ठ गुणनखंड 3 है। परंतु इससे इस तथ्य का विरोधाभास प्राप्त होता है कि a और b सहअभाज्य हैं।

हमें यह विरोधाभास अपनी त्रुटिपूर्ण कल्पना के कारण प्राप्त हुआ है कि $\sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या है। अतः हम निष्कर्ष निकालते हैं कि $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है। **सिद्ध किया**

कक्षा IX में हमने पढ़ा था कि :

- एक परिमेय संख्या और एक अपरिमेय संख्या का योग या अंतर एक अपरिमेय संख्या होती है तथा
- एक शून्येतर परिमेय संख्या और एक अपरिमेय संख्या का गुणनफल या भागफल एक अपरिमेय संख्या होती है।

इसका प्रयोग हम निम्नलिखित प्रश्नों में करेंगें।

उदाहरण : दर्शाइए कि $5 - \sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हल : आइए इसके विपरीत मान लें कि $5 - \sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या है।

तो $5 - \sqrt{3} = \dfrac{a}{b}$ होगा जहाँ a और b पूर्णांक है एवं $b \neq 0$ एवं a एवं b सहअभाज्य हैं।

इस समीकरण को पुनर्व्यवस्थित करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$\sqrt{3} = 5 - \frac{a}{b}$$

चूँकि a और b पूर्णांक हैं, इसलिए $5 - \dfrac{a}{b}$ एक परिमेय संख्या है अर्थात् $\sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या है। अतः हमें विरोधाभास प्राप्त होता है।

हमें यह विरोधाभास अपनी गलत कल्पना के कारण प्राप्त हुआ है कि $5 - \sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या है।

अतः, हम निष्कर्ष निकालते हैं कि $5 - \sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

उदाहरण : दर्शाइए कि $3\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हल : हमने इसके विपरीत माना कि $3\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है।

अतः $3\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ है।

जहाँ a और b सहअभाज्य संख्या हैं एवं $b \neq 0$

पुनर्व्यवस्थित करने पर, हमें $\sqrt{2} = \frac{a}{3b}$ प्राप्त होगा।

चूँकि 3, a और b पूर्णांक हैं, इसलिए $\frac{a}{3b}$ एक परिमेय संख्या होगी। इसलिए $\sqrt{2}$ भी एक परिमेय संख्या होगी।

परंतु इससे इस तथ्य का विरोधाभास प्राप्त है कि $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

अतः हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि $3\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

अपरिमेय संख्याओं का पुनर्भ्रमण

(Revisiting irrational numbers)

विरोधोक्ति द्वारा उपपत्ति (Proof by contradiction) : इसके अंतर्गत हम निम्न प्रकार की संख्याओं के बारे में चर्चा करेंगें।

$$\sqrt{a}, a \pm \sqrt{b}, \frac{a}{\sqrt{b}}, a\sqrt{b}$$

यहाँ $\sqrt{a}$ के प्रकार में $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{7}, \sqrt{5}$ इत्यादि संख्या आएंगी, इस प्रकार की संख्याओं को हम निम्न प्रकार से अपरिमेय सिद्ध करेंगें।

❖ अगर संख्या $\sqrt{a}$ के रूप में है।

उदाहरण : $\sqrt{7}$ एक अपरिमेय संख्या है। सिद्ध कीजिए।

उपपत्ति – इसके विपरीत हम मानेंगे कि $\sqrt{7}$ एक परिमेय संख्या है।

अतः, $\sqrt{7} = \frac{a}{b}$

जहाँ a और b दो पूर्णांक हैं एवं $b \neq 0$ तथा a और b सहअभाज्य हैं।
[अर्थात् a और b में कोई 1 के अतिरिक्त कोई दूसरा उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है]

$\therefore \quad \sqrt{7} = \frac{a}{b}$

$\Rightarrow \quad \sqrt{7}b = a$

दोनों तरफ वर्ग करने पर,

$$7b^2 = a^2 \qquad \left[b^2 = \frac{a^2}{7}\right] \text{———(i)}$$

अतः 7, a^2 को विभाजित करता है।

इसलिए 7, a को भी विभाजित करेगा।

पुनः माना $a = 7c$ जहाँ c कोई पूर्णांक हैं

दोनों तरफ वर्ग करने पर,

$a^2 = 49c^2$

$\Rightarrow 7b^2 = 49c^2$ समीकरण (i) से a^2 का मान प्रतिस्थापित करने पर,

$\Rightarrow b^2 = 7c^2 \qquad \left[c^2 = \frac{b^2}{7}\right]$

अतः 7, b^2 को विभाजित करता है।

- 7, b को भी विभाजित करेगा।

इसका अर्थ है –

7, a और b दोनों का उभयनिष्ठ गुणनखंड है।

यह विरोधाभास हमें इस कारण प्राप्त हुआ है क्योंकि हमने एक त्रुटिपूर्ण कल्पना कर ली कि $\sqrt{7}$ एक परिमेय संख्या है।

अतः हम निष्कर्ष निकालते हैं कि $\sqrt{7}$ एक अपरिमेय संख्या है।

❖ अगर संख्या $a \pm \sqrt{b}$ के रूप में हो तो

इस प्रकार की संख्या को अपरिमेय सिद्ध करने के लिए हम दो तरीकों से सिद्ध कर सकते हैं।

1. एक परिमेय एवं अपरिमेय संख्या का जोड़/घटाव अपरिमेय होता है।
2. विरोधोक्ति द्वारा भी हम यह सिद्ध कर सकते हैं।

उदाहरण :

सिद्ध कीजिए :

1. $2+\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

2. $2-\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

उपपत्ति –

1. $2+\sqrt{3}$

इसके विपरीत मान लें कि $2+\sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या है।

$$\therefore \quad 2+\sqrt{3} = \frac{a}{b} \text{ ———(i)}$$

जहाँ a, b पूर्णांक है $b \neq 0$

(i) को पुनर्व्यवस्थित करने पर

$$2+\sqrt{3} = \frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{a}{b} - 2$$

यहाँ a और b पूर्णांक हैं। अतः $\frac{a}{b} - 2$ परिमेय संख्या है अर्थात् $\sqrt{3}$ भी परिमेय संख्या है।

परंतु इस तथ्य से विरोधाभास प्राप्त होता है कि $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है। हमें यह विरोधाभास अपनी गलत कल्पना के कारण प्राप्त हुआ है कि $2+\sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या है।

अतः $2+\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।

2. विद्यार्थी इसी प्रकार $2-\sqrt{3}$ को भी अपरिमेय संख्या सिद्ध कर सकते हैं।

❖ अगर संख्या $\frac{x}{\sqrt{y}}$ के रूप में हो तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{2}{\sqrt{3}}$ एक अपरिमेय संख्या है।

प्रमाण :

माना $\frac{2}{\sqrt{3}}$ एक परिमेय संख्या है।

$\therefore \quad \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{a}{b}$ [जहाँ a, b पूर्णांक है एवं $b \neq 0$]

$\Rightarrow \quad 2b = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow \quad \frac{2b}{a} = \sqrt{3}$

$\therefore$ 2, a और b पूर्णांक है, तो $\frac{2b}{a}$ एक परिमेय संख्या होगी इसलिए $\sqrt{3}$ भी एक परिमेय संख्या होगा।

परंतु इससे इस तथ्य का विरोधाभास होता है कि $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है। अतः हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि $\frac{2}{\sqrt{3}}$ एक अपरिमेय संख्या है।

प्रश्नावली 1.3

1. सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हल : हम इसके विपरीत यह मान लें कि $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है। अतः हम ऐसे दो पूर्णांक a और b जहाँ $b \neq 0$ प्राप्त कर सकते हैं कि

$\sqrt{5} = \frac{a}{b}$

(यदि a और b में, 1 के अतिरिक्त कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड हो तो हम उस उभयनिष्ठ गुणनखंड से भाग देकर a और b को सहअभाज्य बना सकते हैं।)

$\Rightarrow \quad b\sqrt{5} = a$

दोनों तरफ वर्ग करने पर,

$5b^2 = a^2$ ———(i) $\left[\therefore \; b^2 = \frac{a^2}{5} \quad \therefore \frac{a}{5} = b\right]$

(हम जानते हैं कि यदि कोई अभाज्य संख्या (p) किसी संख्या के वर्ग (a^2) को विभाजित करती है तो वह अभाज्य संख्या (p) दी गई संख्या को भी पूर्णतः विभाजित करेगी।)

अर्थात् $\frac{a^2}{p}$ है तो $\frac{a}{p}$ भी होगा।

पुनः माना $a = 5c$

a का मान (i) में प्रतिस्थापित करने पर

$5b^2 = (5c)^2$

$5b^2 = 25c^2$

$\Rightarrow \quad b^2 = 5c^2 \qquad \left(\Rightarrow c^2 = \frac{b^2}{5}\right)$

अतः b भी 5 से विभाजित होगा। हमने देखा यहाँ a और b में कम से कम एक उभयनिष्ठ गुणनखंड 5 है। परंतु इससे इस तथ्य का विरोधाभास प्राप्त होता है कि a और b में 1 के अतिरिक्त कोई उभयनिष्ठ गुणनखण्ड नहीं है।

यह विरोधाभास हमें इस कारण प्राप्त हुआ है क्योंकि हमने एक त्रुटिपूर्ण कल्पना कर ली है, $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

अतः हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

2. सिद्ध कीजिए कि $3+2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हल :

नोट : इस तरह के प्रश्न दो स्तर से पूछे जाते हैं – एक 5 अंक के लिए और एक 2 या 3 अंक के लिए। दोनों के हल करने का तरीका अलग-अलग होता है।

5 अंकों के लिए हल

इसे साबित करने के लिए पहले हमें यह दिखाना होगा कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

अतः यदि संभव हो तो मान लिया कि $\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

$\therefore \quad \sqrt{5} = \frac{p}{q}$ (जहाँ p और q पूर्णांक हैं तथा p और q के बीच 1 के अलावा कोई दूसरा उभयनिष्ठ गुणनखण्ड नहीं हैं अर्थात् p और q सह अभाज्य संख्याएँ हैं।)

$\Rightarrow \quad \sqrt{5}q = p$

वर्ग करने पर (squaring both sides)

$5q^2 = p^2$ ———(i)

यहाँ 5, p^2 को विभाजित करता है।

अतः 5, p को भी विभाजित करेगा।

अबए माना कि $p = 5K$

p का मान समीकरण (i) में रखने पर

$5q^2 = p^2$

$\Rightarrow \quad 5q^2 = (5K)^2$

$\Rightarrow \quad \cancel{5}q^2 = \overset{5}{\cancel{25}}K^2$

$\therefore \quad q^2 = 5K^2$ ———(ii)

यहाँ 5, q^2 को विभाजित करता है।

अतः 5, q को भी विभाजित करेगा।

समीकरण (i) और (ii) से स्पष्ट पता चलता है कि 5, p और q दोनों को विभाजित करता है, लेकिन हमारा मानना था कि p और q के बीच 1 के अलावे कोई दूसरा उभयनिष्ठ गुणनखण्ड नहीं है, जो कि गलत था।

अतः $\sqrt{5}$ परिमेय संख्या नहीं है। अतः $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

इस प्रकार $3+2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या हुआ क्योंकि परिमेय संख्या और अपरिमेय संख्या का जोड़ हमेशा एक अपरिमेय संख्या ही होता है।

अतः $3+2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है। **सिद्ध किया**

2 या 3 अंकों के लिए हल

हम जानते हैं कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है तथा साथ-ही-साथ यह भी जानते हैं कि एक परिमेय संख्या तथा एक अपरिमेय संख्या का जोड़ भी हमेशा एक अपरिमेय संख्या ही होता है।

यहाँ 3 एक परिमेय संख्या है तथा $2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

अतः इन दोनों का जोड़ अर्थात् $3+2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या हुआ। **सिद्ध किया**

3. सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित संख्याएँ अपरिमेय हैं।

(i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **(ii)** $7\sqrt{5}$

(iii) $6+\sqrt{2}$

हल :

(i) इसके विपरीत हम मान लेते हैं कि $\frac{1}{\sqrt{2}}$ एक परिमेय संख्या है।

$\therefore \quad \frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{a}{b}$ (जहाँ a और b पूर्णांक हैं और $b \neq 0$)

$\Rightarrow \quad \sqrt{2}a = b$

$\Rightarrow \quad \sqrt{2}=\frac{b}{a}$

चूँकि b और a पूर्णांक हैं।

$\therefore \quad \frac{b}{a}$ परिमेय संख्या होगी। अतः $\sqrt{2}$ भी एक परिमेय संख्या होगी।

परंतु इस तथ्य से विरोधाभास प्राप्त होता है कि $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है। अतः हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि $\frac{1}{\sqrt{2}}$ एक अपरिमेय संख्या है।

(ii) $7\sqrt{5}$

इसके विपरीत मान लें कि $7\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

$\therefore \quad 7\sqrt{5}=\frac{a}{b}$ ———— (i)

जहाँ a, b पूर्णांक हैं और $b \neq 0$.

समीकरण (i) को पुनर्व्यवस्थित करने पर,

$7\sqrt{5}=\frac{a}{b}$

$\Rightarrow \quad \sqrt{5}=\frac{a}{7b}$

यहाँ a और b पूर्णांक हैं। अतः $\frac{a}{7b}$ एक परिमेय संख्या है। अर्थात् $\sqrt{5}$ भी परिमेय संख्या है।

परंतु इससे इस तथ्य का विरोधाभास प्राप्त होता है कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है। हमें यह विरोधाभास अपनी गलत कल्पना के कारण प्राप्त हुआ है कि $7\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है।

(iii) $6+\sqrt{2}$

इसके विपरीत मान लें कि $6+\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है।

$\therefore \quad 6+\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ ———— (i)

जहाँ a, b पूर्णांक है $b \neq 0$

(i) को पुनर्व्यवस्थित करने पर $6+\sqrt{2}=\frac{a}{b}$

$\Rightarrow \sqrt{2}=\frac{a}{b}-6$

यहाँ a और b पूर्णांक हैं। अतः $\frac{a}{b}-6$ परिमेय संख्या है अर्थात् $\sqrt{2}$ भी परिमेय संख्या है।

परंतु इस तथ्य से विरोधाभास प्राप्त होता है कि $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है। हमें यह विरोधाभास अपनी गलत कल्पना के कारण प्राप्त हुआ है कि $6+\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है।

अतः $6+\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

परिमेय संख्याओं और उनके दशमलव प्रसार

हम जानते हैं कि परिमेय संख्याओं का दशमलव प्रसार या तो सांत (Terminate) होता है या फिर असांत आवर्ती (Non-terminating repeating) होता है।

यहाँ हम परिमेय संख्याओं के दशमलव प्रसार की चर्चा करेंगे जहाँ बिना विभाजन के परिमेय संख्याओं के दशमलव प्रसार को ज्ञात करेंगें।

माना x एक परिमेय संख्या है, जिसे $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त किया जा

सकता है। जहाँ $\frac{p}{q}$ सहअभाज्य है तथा हर का, अर्थात् q का अभाज्य गुणनखंड 2^m5^n के रूप में है जहाँ m, n एक ऋणेतर पूर्णांक है।

> ● विद्यार्थी इस प्रकार के प्रश्न हल करते वक्त सर्वप्रथम परिमेय संख्या को सरलतम रूप में बदलेगें (अगर p एवं q सहअभाज्य नहीं है) तभी उसके हर का अभाज्य गुणनखंड करेंगे।

प्रश्नावली 1.4

1. बिना लंबी विभाजन प्रक्रिया किए बताइए कि निम्नलिखित परिमेय संख्याओं के दशमलव प्रसार सांत हैं या असांत आवर्ती हैं :

(i) $\frac{13}{3125}$ **(ii)** $\frac{17}{8}$

(iii) $\frac{64}{455}$ **(iv)** $\frac{15}{1600}$

(v) $\frac{29}{343}$ **(vi)** $\frac{23}{2^3 5^2}$

(vii) $\frac{129}{2^2 5^7 7^5}$ **(viii)** $\frac{6}{15}$

(ix) $\frac{35}{50}$ **(x)** $\frac{77}{210}$

हल :

(i) $\frac{13}{3125} = \frac{13}{5^5}$ ——— सांत

(ii) $\frac{17}{8} = \frac{17}{2^3}$ ——— सांत

(iii) $\frac{64}{455} = \frac{64}{5\times7\times13}$ ——— असांत

(iv) $\frac{15}{1600} = \frac{\cancel{15}^{\,3}}{\cancel{1600}_{\,320}} = \frac{3}{2^6\times5}$ ——— सांत

(v) $\frac{29}{343} = \frac{29}{7^3}$ ——— असांत

(vi) $\frac{23}{2^3 5^2}$ ——— सांत

(vii) $\frac{129}{2^2 5^7 7^5}$ ——— असांत

(viii) $\frac{6}{15} = \frac{2}{5}$ ——— सांत

(ix) $\frac{35}{50} = \frac{7}{10} = \frac{7}{2\times5}$ ——— सांत

(x) $\frac{77}{210} = \frac{11}{30} = \frac{11}{2\times3\times5}$ ——— असांत

2. ऊपर दिए गए प्रश्न में उन परिमेय संख्याओं के दशमलव प्रसारों को लिखिए जो सांत हैं।

हल : प्रश्न संख्या ऊपर के प्रश्न के अनुसार ही है–

(i) $\frac{13}{3125} = 0.00416$

(ii) $\frac{17}{8} = 2.125$

(iv) $\frac{15}{1600} = 0.009375$

(vi) $\frac{23}{2^3 5^2} = 0.115$

(viii) $\frac{6}{15} = \frac{2}{5} = 0.4$ (सरलीकरण करने पर)

(ix) $\frac{35}{50} = \frac{7}{10} = 0.7$

3. कुछ वास्तविक संख्याओं के दशमलव प्रसार नीचे दर्शाए गए हैं। प्रत्येक स्थिति के लिए निर्धारित कीजिए कि यह संख्या परिमेय संख्या है या नहीं। यदि यह परिमेय संख्या है और $\frac{p}{q}$ के रूप में है तो q के अभाज्य गुणनखंडों के बारे में आप क्या कह सकते हैं?

(i) 43.123456789

हल : दी गई संख्या का दशमलव प्रसार सांत है। अत: परिमेय संख्या है। और इसका हर (q) $2^m \times 5^n$ के रूप में है।

Hint : $\left(\frac{43.123456789}{100000000}\right)$

(ii) 0.120120012000120000...

हल : दी गई संख्या अपरिमेय संख्या है क्योंकि इसका दशमलव प्रसार असांत आवर्ती नहीं है।

(iii) $43.\overline{123456789}$

हल : दी गई संख्या $43.\overline{123456789}$ परिमेय संख्या है क्योंकि इसका दशमलव प्रसार असांत आवर्ती है।

वास्तविक संख्याएँ – Real numbers

प्रमेय – Theorem

विभाजन प्रमेयिका – Division Algorithm

प्राकृतिक संख्याएँ – Natural Numbers

पूर्ण संख्याएँ – Whole Numbers

पूर्णांक – Integers

परिमेय संख्याएँ – Rational Numbers

अपरिमेय संख्याएँ – Irrational Numbers

सांत – Terminating

आवर्ती – Repeating

दशमलव प्रसार – Decimal expansion

असांत आवर्ती – Non terminating repeating

अभाज्य गुणनखंड – Prime Factorisation

विरोधाभास – Contradiction

सहभाज्य – Co–prime

महत्तम समापवर्तक – Highest Common Factor (HCF)

लघुत्तम समापवर्त्य – Lowest Common Multiple (LCM)

शून्येत्तर पूर्णांक – Non Zero Integers